RESULTAN DUA POLINOMIAL DAN PEMBAGI NOL MATRIKS ATAS RING KOMUTATIF

(Resultant of Two Polynomials and Zero Divisor of Matrices over Commutative Rings)

Aswar Anas[1], M. Zaki Riyanto[2], Musthofa[3], Sri Wahyuni[4]

[1,2]S2 Matematika FMIPA UGM (*zaki@mail.ugm.ac.id*)
[3]Jurusan Matematika FMIPA UNY (*musthofa@uny.ac.id*)
[4]Jurusan Matematika FMIPA UGM (*swahyuni@ugm.ac.id*)

ABSTRAK

Diberikan ring komutatif *R* dengan elemen satuan dan dua polinomial *f* dan *g* berderajad positif atas *R*. Maka dapat ditentukan resultan dari *f* dan *g*, yaitu determinan matriks Sylvester dari *f* dan *g*. Dalam makalah ini dibahas mengenai konstruksi resultan atas *R*, yaitu melalui eksistensi faktor iredusibel yang sama dari *f* dan *g*. Selanjutnya, diberikan sifat-sifat resultan dan aplikasinya pada pembagi nol matriks atas *R*.

Kata kunci: faktor iredusibel, pembagi nol matriks, resultan, ring komutatif

ABSTRACT

Let *R* be a commutative ring with identity element, and let *f* and *g* be two polynomials with positive degree over *R*. Then, we can determine the resultant of *f* and *g*, i.e. the determinant of Sylvester matrix of *f* and *g*. In this paper, we described the constructions of resultant over *R* from the existence of common irreducibel factors of *f* and *g*. Moreover, we described the properties of the resultant and applications to the zero divisor of matrices over *R*.

Keywords: commutative ring, irreducibel factor, resultant, zero divisior of matrices

1. PENDAHULUAN

Diberikan field F dan dua polinomial f dan g berderajad positif di $F[x]$. Akan dilihat apakah f dan g mempunyai suatu faktor iredusibel yang sama, yaitu terdapat polinomial berderajad positif h di $F[x]$ sedemikian hingga h membagi habis f dan g. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah dengan memfaktorkan f dan g ke dalam polinomial-polinomial iredusibel. Akan tetapi, jika digunakan polinomial berderajad besar, maka dibutuhkan perhitungan-perhitungan yang banyak.

Untuk mengatasi masalah ini dapat digunakan suatu metode yang lebih efisien, yaitu menggunakan resultan. Resultan dari polinomial f dan g adalah determinan dari matriks Sylvester dari f dan g. Oleh Cox et.al. (1996) telah dijelaskan mengenai resultan dari poliniomial atas field.

Dalam makalah ini dijelaskan mengenai motivasi dan konstruksi resultan dan generalisasinya untuk suatu ring komutatif. Brown (1992) telah dikaji mengenai kaitan antara resultan atas ring dan eksistensi dari faktor iredusibel menggunakan sifat pembagi

Makalah ini telah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika HPA (Himpunan Peminat Aljabar) pada tanggal 27 Maret 2010 di UIN Syarif Hidayatullah Jakarta.

nol. Selanjutnya, diberikan sifat-sifat dari resultan dan penerapannya pada pembagi nol matriks atas ring komutatif.

Sebelum diberikan definisi dari resultan, berikut ini diberikan contoh motivasi sederhana dari konsep resultan. Diberikan suatu field F dan polinomial f dan g di $F[x]$ berderajad positif. Akan ditentukan syarat perlu dan cukup agar f dan g mempunyai faktor iredusibel yang sama di $F[x]$. Misal diberikan $f, g \in F[x]$ dengan $f = a_2x^2 + a_1x + a_0$ dan $g = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$, $a_2, b_3 \neq 0$. Misalkan h adalah faktor iredusibel dari f dan g, maka h berbentuk linear, yaitu $f = (h)(-\alpha_1 x - \alpha_0)$ dan $g = (h)(\beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0)$, untuk suatu $\alpha_1, \alpha_0, \beta_2, \beta_1, \beta_0 \in F$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} h &= \frac{f}{(-\alpha_1 x - \alpha_0)} \\ &= \frac{g}{(\beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0)} \end{aligned} \tag{1}$$

Dari (1) diperoleh:

$$\begin{aligned}
&(f)(\beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0) = (g)(-\alpha_1x - \alpha_0) \\
&\Leftrightarrow (a_2x^2 + a_1x + a_0)(\beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0) \\
&\quad = (b_3x^3 + \dots + b_0)(-\alpha_1x - \alpha_0) \\
&\Leftrightarrow (a_2x^2 + a_1x + a_0)(\beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0) \\
&\quad + (\alpha_1x + \alpha_0)(b_3x^3 + \dots + b_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow (a_2x^2 + a_1x + a_0)(\beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0) \\
&\quad + (\alpha_1x + \alpha_0)(b_3x^3 + \dots + b_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow a_2\beta_2x^4 + a_2\beta_1x^3 + a_2\beta_0x^2 + a_1\beta_2x^3 \\
&\quad + a_1\beta_1x^2 + a_1\beta_0x + a_0\beta_2x^2 + a_0\beta_1x \\
&\quad + a_0\beta_0 + \alpha_1b_3x^4 + \alpha_1b_2x^3 + \alpha_1b_1x^2 \\
&\quad + \alpha_1b_0x + \alpha_0b_3x^3 + \alpha_0b_2x^2 + \alpha_0b_1x \\
&\quad + \alpha_0b_0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (a_2\beta_2 + b_3\alpha_1)x^4 \\
&\quad + (a_2\beta_1 + a_1\beta_2 + b_2\alpha_1 + b_3\alpha_0)x^3 \\
&\quad + (a_2\beta_0 + \dots + b_2\alpha_0)x^2 \\
&\quad + (a_1\beta_0 + a_0\beta_1 + b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0)x \\
&\quad + (a_0\beta_0 + b_0\alpha_0) = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Persamaan polinomial (2) dipenuhi jika semua koefisiennya sama dengan nol, sehingga

$$\begin{cases}
0 = a_2\beta_2 + b_3\alpha_1 \\
0 = a_2\beta_1 + a_1\beta_2 + b_2\alpha_1 + b_3\alpha_0 \\
0 = a_2\beta_0 + a_1\beta_1 + a_0\beta_2 + b_1\alpha_1 \\
\quad + b_2\alpha_0 \\
0 = a_1\beta_0 + a_0\beta_1 + b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0 \\
0 = a_0\beta_0 + b_0\alpha_0
\end{cases} \tag{3}$$

Diperoleh suatu sistem persamaan linear homogen (3) dengan variabel $\alpha_1, \alpha_0, \beta_2, \beta_1, \beta_0$. Jika ditulis ke dalam bentuk matriks, diperoleh:

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = O \tag{4}$$

Agar persamaan (3) mempunyai solusi non trivial, maka matriks koefisien dalam (4) haruslah tidak invertibel, sebab satu-satunya pembagi nol di F adalah nol. Jadi, diperoleh bahwa, f dan g mempunyai faktor iredusibel yang sama jika dan hanya jika determinan dari matriks koefisiennya sama dengan nol, yaitu

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Sebelum lebih jauh membahas mengenai resultan dua polinomial atas ring komutatif, berikut ini diberikan terlebih dahulu resultan dua polinomial atas field. Pembahasan ini diperlukan karena digunakan untuk memotivasi konstruksi dan generalisasinya untuk suatu ring komutatif.

2. RESULTAN DUA POLINOMIAL ATAS FIELD

Diberikan field *F*, misalkan $f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$ dan $g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ adalah polinomial berderajad positif di $F[x]$. Akan dicari syarat perlu dan cukup agar *f* dan *g* mempunyai faktor iredusibel yang sama. Sebelumnya, terlebih dahulu diberikan Lemma berikut ini.

Lemma 1. *Diberikan f dan g di* $F[x]$ *adalah polinomial dengan derajat positif masing-masing m dan n, yaitu* $\delta(f) = m$ *dan* $\delta(g) = n$. *Polinomial f dan g mempunyai faktor iredusibel yang sama jika dan hanya jika terdapat polinomial* $p, q \in F[x]$ *sedemikian hingga*

(1) $p, q \neq 0$

(2) $\delta(p) \leq n-1$ *dan* $\delta(q) \leq m-1$

(3) $pf = qg$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan *f* dan *g* mempunyai faktor iredusibel yang sama, yaitu $h \in F[x]$. Maka $f = f_1 h$ dan $g = g_1 h$, untuk suatu $g_1, f_1 \in F[x]$, sehingga $\delta(f_1) \leq n-1$ dan $\delta(g_1) \leq m-1$. Maka $gf_1 - fg_1 = g_1 hf_1 - f_1 hg_1 = 0$, dengan demikian dapat diambil *q* adalah f_1 dan *p* adalah g_1 sedemikian hingga $pf = qg$. $(\Leftarrow)$ Misalkan *p* dan *q* memenuhi ketiga sifat pada Lemma 1 di atas. Misalkan $q \neq 0$. Andaikan *f* dan *g* tidak mempunyai faktor iredusibel yang sama, maka pembagi persekutuan terbesar dari *f* dan *g* adalah 1. Sehingga dapat ditemukan polinomial dan $A, B \in F[x]$ sehingga $Af + Bg = 1$, dengan menggunakan persamaan $qg = -pf$ diperoleh

$$\begin{aligned} q &= (Af + Bg)q \\ &= (Afq + Bg(-pf)) \\ &= (Aq - Bgp) f \end{aligned}$$

Dari persamaan tersebut menunjukkan bahwa *q* mempunyai derajat paling sedikit *m*, hal ini kontradiksi karena derajat dari *q* paling sedikit *m*-1. Jadi, *f* dan *g* mempunyai faktor iredusibel yang sama dengan derajat positif. ■

Misalkan *f* dan *g* mempunyai faktor iredusibel yang sama, maka terdapat $p, q \in F[x]$ sedemikian hingga

$$pf = qg \qquad (5)$$

dengan $\delta(p) \leq n-1$ dan $\delta(q) \leq m-1$. Misalkan $p = c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_0$ dan $q = -d_{m-1}x^{m-1} - ... - d_0$. Persamaan (5) dapat dinyatakan dalam sistem persaman linear homogen dengan variabel c_i dan d_j sebagai berikut:

$$\begin{cases} 0 = c_{n-1}a_m + d_{m-1}b_n \\ 0 = c_{n-1}a_{m-1} + ... + d_{m-2}b_n \\ \quad \vdots \\ 0 = c_0 a_0 + b_0 d_0 \end{cases} \qquad (6)$$

Jika ditulis ke dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_0 \\ d_{m-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_0 \end{pmatrix} = O \qquad (7)$$

Agar sistem (6) mempunyai solusi non-trivial, maka matriks koefieisen dari (7) haruslah tidak invertibel, atau dengan kata lain determinan dari matriks koefisiennya sama dengan nol. Karena determinan dari suatu matriks sama dengan determinan dari transpose matriksnya, maka determinan dari transpose matriks koefisiennya sama dengan nol. Hal ini yang melatarbelakangi pendefinisian matriks Sylvester dan resultan seperti diberikan pada definisi berikut.

Definisi 2. Diberikan field *F*. Diberikan polinomial *f* dan *g* berderajat positif di $F[x]$, $f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$ dan $g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$, dengan $a_m, b_n \neq 0$. *Matriks Sylvester* dari *f* dan *g* terhadap *x*, dinotasikan dengan $\mathrm{Syl}_x(f,g)$, adalah matriks:

$$\mathrm{Syl}_x(f,g) = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, *resultan* dari *f* dan *g*, dinotasikan dengan $\mathrm{Res}_x(f,g)$, adalah determinan dari $\mathrm{Syl}_x(f,g)$, yaitu $\mathrm{Res}_x(f,g) = \det(\mathrm{Syl}_x(f,g))$.

Proposisi 3. *Diberikan* $f,g \in F[x]$ *berderajat positif, maka* f *dan* g *mempunyai faktor iredusibel yang sama di* $F[x]$ *jika dan hanya jika* $\mathrm{Res}_x(f,g) = 0$.

Bukti dari Proposisi 3 telah diberikan pada awal pembahasan Bab II. Selanjutnya, diberikan suatu sifat dari resultan seperti pada Proposisi 4 di bawah ini.

Proposisi 4. *Jika* $f,g \in F[x]$ *polinomial berderajat positif, maka terdapat* $p,q \in F[x]$ *sedemikian hingga* $pf + qg = \mathrm{Res}_x(f,g)$.

Bukti. Misalkan $f = a_m x^m + \dots + a_0$ dan $g = b_n x^n + \dots + b_0$, dengan $a_m, b_n \neq 0$. Diberikan $\mathrm{Syl}_x(f,g)$ adalah matriks Sylvester dari *f* dan *g*, maka diperoleh

$$\mathrm{Syl}_x(f,g)\begin{pmatrix} x^{m+n-1} \\ x^{m+n-2} \\ \vdots \\ x^m \\ x^{m-1} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n-1}f \\ x^{n-2}f \\ \vdots \\ f \\ x^{m-1}g \\ \vdots \\ xg \\ g \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Misalkan $c_i = \mathrm{cof}_{i,m+n}(\mathrm{Syl}_x(f,g))$, dengan $i = 1,\dots,m+n$. Oleh karena itu, $c_1,\dots,c_{m+n}$ merupakan kofaktor-kofaktor dari kolom terakhir pada $\mathrm{Syl}_x(f,g)$. Menggunakan ekspansi Laplace, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m+n} c_i \left[\mathrm{Syl}_x(f,g)\right]_{i,m+n} = \mathrm{Res}_x(f,g)$$

dan $\sum_{i=1}^{m+n} c_i \left[\mathrm{Syl}_x(f,g)\right]_{i,j} = 0$, untuk $j \neq m+n$. Selanjutnya, dengan mengalikan baris ke-*i* dari persamaan (8) dengan c_i dan menjumlahkan hasilnya, diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} & c_1 x^{n-1} f + c_2 x^{n-2} f + ... \\ & \quad + c_n f + c_{n+1} x^{m-1} g + c_{n+2} x^{m-2} g \\ & \quad + ... + c_{n+m} g \\ & = \sum_{j=1}^{m+n} c_1 \left[\mathrm{Syl}_x \left(f, g \right) \right]_{1,j} x^{m+n-j} \\ & \quad + ... + \sum_{j=1}^{m+n} c_{m+n} \left[\mathrm{Syl}_x \left(f, g \right) \right]_{(m+n),j} x^{m+n-j} \\ & = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} c_i \left[\mathrm{Syl}_x \left(f, g \right) \right]_{i,j} x^{m+n-j} \\ & = \mathrm{Res}_x \left(f, g \right) \end{aligned}$$

Dari sini diperoleh bahwa terdapat $p, q \in F[x]$, yaitu $p = c_1 x^{n-1} + ... + c_n$ dan $q = c_{n+1} x^{m-1} + ... + c_{n+m}$ sedemikian hingga $pf + qg = \mathrm{Res}_x \left(f, g \right)$. ■

3. RESULTAN DUA POLINOMIAL ATAS RING KOMUTATIF

Diberikan ring komutatif *R* dengan elemen satuan. Diberikan $f, g \in R[x]$ berderajad positif dengan $\delta(f) = m$ dan $\delta(g) = n$. Berdasarkan definisi resultan pada field, maka dapat dikonstruksi juga resultan untuk *f* dan *g*.

Misalkan *f* dan *g* mempunyai faktor iredusibel yang sama, yaitu $h \in R[x]$. Maka $\delta(f), \delta(g) \geq \delta(h) \geq 1$. Misalkan $f = hf_1$ dan $g = hg_1$, untuk suatu $f_1, g_1 \in R[x]$. Karena $\delta(h) \geq 1$, maka $\delta(f_1) < \delta(f)$, diperoleh $f_1 \notin \langle f \rangle$. Karena $f_1 g = f_1 h g_1 = g_1 h f_1 = g_1 f$, maka $f_1 g \in \langle f \rangle$. Diperoleh bahwa $\langle g \rangle$ *belongs to* $\langle f \rangle$, sehingga $g \in Z\left(R[x] / \langle f \rangle \right)$.

Sebelumnya, diberikan terlebih dahulu dua pernyataan yang penting untuk membuktikan Teorema 7, yaitu Teorema McCoy dan Lemma 6 mengenai sifat eksistensi solusi dari suatu persamaan linear homogen.

Lemma 5. (Teorema N. McCoy) *Diberikan* $A \in M_{m \times n}(R)$. *Sistem persamaan linear homogen* $AX = O$ *mempunyai solusi non-trivial jika dan hanya jika* $\mathrm{rk}(A) < n$.

Lemma 6. *Diberikan* $A \in M_{m \times n}(R)$. *Jika* $m = n$, *maka* $\mathrm{rk}(A) < n$ *jika dan hanya jika* $\det(A) \in Z(R)$.

Teorema 7. *Diberikan f suatu polinomial monik berderajad positif di* $R[x]$ *dan g suatu polinomial tidak nol di* $R[x]$. *Maka* $g \in Z\left(R[x] / \langle f \rangle \right)$ *jika* dan hanya jika $\mathrm{Res}_x \left(f, g \right) \in Z(R)$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan *g* adalah pembagi nol di $R[x] / \langle f \rangle$, maka terdapat $h \in R[x] - \langle f \rangle$ sedemikian hingga $hg \in \langle f \rangle$. Misalkan $m = \delta(f)$ dan $n = \delta(g)$, maka $m \geq 1$ dan $n \geq 0$. Menggunakan algoritma pembagian, maka $h = qf + r$, dengan $q, r \in R[x]$ dan $r = 0$ atau $\delta(r) < m$. Karena $h \notin \langle f \rangle$, maka $r \neq 0$. Diperoleh $hg \in \langle f \rangle$, maka terdapat $k \in R[x]$ sedemikian hingga

$$gr = kf \,. \tag{9}$$

Misalkan *k* tidak nol. Karena *f* monik, maka persamaan (9) berakibat

$$\begin{aligned} m + \delta(k) &= \delta(kf) \\ &= \delta(rg) \leq \delta(r) + \delta(g) \\ &< m + n \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $k=0$ atau $\delta(k)\le n-1$. Misalkan ditulis:

$$\begin{aligned} f &= x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ g &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \\ r &= c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \ldots + c_0 \\ k &= -\left(d_{n-1}x^{n-1} + d_{n-2}x^{n-2} + \ldots + d_0\right). \end{aligned} \qquad (10)$$

Jelas bahwa $b_n \neq 0$, $r \neq 0$, dan $\delta(r)\le m-1$. Oleh karena itu, terdapat $c_i \neq 0$. Dari persamaan (9) diperoleh persamaan:

$$\left(b_n x^n + \ldots + b_0\right)\left(c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_0\right) + \left(d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_0\right)\left(x^m + \ldots + a_0\right) = 0$$

atau

$$\left(b_n c_{m-1} + d_{n-1}\right)x^{m+n-1} + \ldots + \left(b_0 c_0 + a_0 d_0\right) = 0$$

yang berakibat bahwa

$$\begin{cases} 0 = b_n c_{m-1} + d_{n-1} \\ 0 = b_n c_{m-2} + \ldots + d_{n-2} \\ \quad \vdots \\ 0 = b_0 c_0 + a_0 d_0 \end{cases} \qquad (11)$$

Sehingga diperoleh suatu sistem persamaan linear homogen dengan $m+n$ persamaan dan variabel $c_{m-1},\ldots,c_0,d_{n-1},\ldots,d_0$. Jika ditulis dalam bentuk matriks, diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{m-1} & \ldots & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_{m-1} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{m-1} & \ldots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \ldots & b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_n & b_{n-1} & \ldots & b_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{m-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_0 \\ d_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_0 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

atau

$$\mathrm{Syl}_x\left(f,g\right)^T \xi = \overline{0} \qquad (12)$$

dengan $\xi = \left(c_{m-1},\ldots,c_0,d_{n-1},\ldots,d_0\right)^T$.

Karena terdapat $c_i \neq 0$, maka ξ merupakan solusi non-trivial dari sistem persamaan linear homogen (11). Berdasarkan Teorema McCoy, karena (11) mempunyai solusi non-trivial, maka $\mathrm{rk}\left(\mathrm{Syl}_x\left(f,g\right)^T\right) < m+n$. Selanjutnya berdasarkan Lemma 6, karena $\mathrm{Syl}_x\left(f,g\right)^T$ matriks persegi, maka $\det\left(\mathrm{Syl}_x\left(f,g\right)^T\right) \in Z(R)$. Karena $\det\left(\mathrm{Syl}_x\left(f,g\right)^T\right) = \det\left(\mathrm{Syl}_x\left(f,g\right)\right)$, maka diperoleh $\mathrm{Res}_x\left(f,g\right) \in Z(R)$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan $\mathrm{Res}_x\left(f,g\right) \in Z(R)$. Berdasarkan Lemma 6, maka $rk\left(\mathrm{Syl}_x\left(f,g\right)^T\right) < m+n$. Menurut Teorema McCoy, maka persamaan (12) mempunyai solusi non-trivial $\xi \in R^{m+n}$. Sehingga diperoleh $gr = kf$, dengan *r* dan *k* didefinisikan seperti pada (10). Jika untuk setiap $c_i = 0$, maka $r = 0$, yang berakibat $kf = 0$. Karena *f* monik, maka $k = 0$. Akibatnya diperoleh $\left(c_{m-1},\ldots,c_0,d_{n-1},\ldots,d_0\right) = \left(0,\ldots,0\right)$, sehingga $\left(c_{m-1},\ldots,c_0,d_{n-1},\ldots,d_0\right)$ bukan solusi non-trivial. Oleh karena itu, haruslah terdapat $c_i \neq 0$, sehingga $r \neq 0$. Karena $\delta(r)\le m-1$, maka $r \notin \langle f \rangle$. Selanjutnya, karena $gr = kf = 0$ dan $r \neq 0$, maka diperoleh bahwa $g \in Z\left(R[x]/\langle f \rangle\right)$. ■

Resultan ditentukan oleh dua polinomial *f* dan *g*, teorema berikut ini menjelaskan hubungan antara resultan dan suatu ideal di *R* yang dibangun oleh *f* dan *g*.

Teorema 8. *Diberikan* $f,g \in R[x]$, *dengan* $f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0$ *dan* $g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$. *Misalkan* $a_m, b_n \neq 0$ *dan* $m+n \ge 1$, *maka terdapat* $p,q \in R[x]$ *sedemikian hingga*

(1) $\delta(p) \le n-1$ *dan* $\delta(q) \le m-1$

(2) $\mathrm{Res}_x\left(f,g\right) = pf + qg$.

Bukti dari Teorema 8 ini sama dengan pembuktian pada Lemma 1 dan Proposisi 4, sebab pada proses pembuktiannya tidak digunakan sifat-sifat khusus yang dimiliki field tetapi tidak dimiliki ring.

Berikut ini diberikan teorema yang yang mengaitkan hubungan antara resultan dengan polinomial karakteristik dari suatu matriks atas *R*. Teorema ini digunakan dalam pembahasan mengenai pembagi nol matriks pada bab selanjutnya. Sebelumnya, terlebih dahulu diberikan lemma sebagai berikut.

Lemma 8. *Diberikan* $f,g\in R[x]$, *dengan* $f=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_0$ *dan* $g=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0$. *Misalkan* α_i *adalah akar-akar dari f dan* β_j *adalah akar-akar dari g, maka*

$$\text{Res}_x(f,g)=a_m^n\prod_{i=1}^{m}g(\alpha_i)=b_n^m\prod_{j=1}^{m}f(\beta_j).$$

Lemma 9. (Lemma Spesialisasi) *Diberikan* $f,g\in R[x_1,...,x_n]$. *Misalkan* $f(j_1,...,j_n)=g(j_1,...,j_n)$ *untuk semua bilangan bulat positif* $j_1,...,j_n$, *maka untuk setiap ring komutatif R dan sebarang* $r_1,...,r_n\in R$ *berlaku* $f(r_1,...,r_n)=g(r_1,...,r_n)$.

Teorema 10. *Diberikan* $A\in M_{n\times n}(R)$ *dan* $g\in R[x]^*$. *Misalkan* C_A *adalah polinomial karakteristik dari A. Maka* $\text{Res}_x(C_A,g)=\det(g(A))$.

Bukti. Misalkan $\deg(g)=0$, maka $g=b$, untuk suatu $b\in R^*$. Maka $\text{Res}_x(C_A,g)=\text{Res}_x(|xI_n-A|,b)=b^n$. Di lain pihak, $g(A)=bI_n$, sehingga $\det(g(A))=\det(bI_n)=b^n$. Teorema terbukti untuk $\deg(g)=0$. Selanjutnya, misalkan $\deg(g)\geq 1$. Dibuktikan terlebih dahulu untuk $R=\mathbb{Z}$. Misalkan $\deg(g)=m\geq 1$, maka $C_A=\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ dan $g=b\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)$ dalam suatu *splitting field* dari $C_A g$ atas $\mathbb{Q}$. Berdasarkan Lemma 8 diperoleh bahwa $\text{Res}_x(C_A,g)=\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i)$. Di lain pihak diketahui

$$\begin{aligned} g(A)&=b\prod_{j=1}^{m}(A-\beta_j I_n)\\ &=(-1)^m b\prod_{j=1}^{m}(\beta_j I_n-A)\end{aligned}$$

sehingga diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}\det(g(A))&=\det\left((-1)^m b\prod_{j=1}^{m}(\beta_j I_n-A)\right)\\ &=(-1)^{mn}b^n\prod_{j=1}^{m}\det(\beta_j I_n-A)\\ &=(-1)^{mn}b^n\prod_{j=1}^{m}C_A(\beta_j)\\ &=(-1)^{m}b^n\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\beta_j-\alpha_i)\\ &=\prod_{i=1}^{n}\left(b\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)\right)\\ &=\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i)\\ &=\text{Res}_x(C_A,g)\end{aligned}$$

Teorema terbukti untuk $R=\mathbb{Z}$. Selanjutnya, teorema dibuktikan secara umum. Misalkan $A\in M_{n\times n}(R)$, $g\in R[x]^*$, dan $\deg(g)=m\geq 1$. Misalkan $A=(a_{ij})$ dan $g=b_m x^m+...+b_0$, dengan $b_m\neq 0$.

Diberikan $\{x_{ij} | 1 \le i, j \le n\}$, $\{y_0, ..., y_m\}$ dan x adalah semua indeterminit yang independen atas $\mathbb{Z}$. Dibentuk himpunan $\overline{R} = \mathbb{Z}[x_{11}, ..., x_{nn}, y_0, ..., y_m]$, diberikan $\overline{A} = (x_{ij}) \in M_{n\times n}(\overline{R})$, dan polinomial $\overline{g} = y_m x^m + y_{m-1}x^{m-1} + ... + y_0 \in \overline{R}[x]$. Didefinisikan polinomial F dan G di $\overline{R}[x]$ dengan $F = \mathrm{Res}_x(C_{\overline{A}}, \overline{g})$ dan $G = \det(\overline{g}(\overline{A}))$. Karena teorema berlaku untuk $R = \mathbb{Z}$, maka berakibat $F(j_{11}, ..., j_{nn}, j_0, ..., j_m) = G(j_{11}, ..., j_{nn}, j_0, ..., j_m)$ untuk setiap bilangan bulat positif $j_{11}, ..., j_{nn}, j_0, ..., j_m$. Berdasarkan Lemma Spesialisasi diperoleh bahwa $F(a_{11}, ..., a_{nn}, b_0, ..., b_m) = G(a_{11}, ..., a_{nn}, b_0, ..., b_m)$ yang berakibat bahwa $\mathrm{Res}_x(C_A, g) = \det(g(A))$. ■

4. PEMBAGI NOL MATRIKS ATAS RING KOMUTATIF

Diberikan R adalah suatu ring komutatif. Suatu matriks $A \in M_{n\times n}(R)$ disebut pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$ jika $AB = O$, untuk suatu $B \in M_{n\times n}(R)$, dan disebut pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$ jika $CA = O$, untuk suatu $C \in M_{n\times n}(R)$.

Teorema 11. *Diberikan* $A \in M_{n\times n}(R)$.

(a) *A adalah pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika* $\det(A) \in Z(R)$.

(b) *A adalah pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika* $\det(A) \in Z(R)$.

Bukti. Jika $\det(A) \in Z(R)$, maka $rk(A) < n$. Akibatnya, terdapat vektor tak nol $x \in R^n$ sedemikian hingga $Ax = 0$. Jika dibentuk $B = (x | x | ... | x)$, maka $B \ne O$ dan $AB = (Ax | Ax | ... | Ax) = (0 | 0 | ... | 0) = O$. Jadi, A merupakan pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$. Karena $\det(A^t) = \det(A)$, maka dengan argumen yang sama, $\det(A) \in Z(R)$ berakibat A^t merupakan pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$. Jadi, $A^t C = O$, untuk suatu matriks tak nol $C \in M_{n\times n}(R)$. Lebih lanjut, $C^t \ne O$ dan $C^t A = (A^t C)^t = O^t = O$. Dengan kata lain, A merupakan pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$. Jadi, jika $\det(A) \in Z(R)$, maka A merupakan pembagi nol kiri sekaligus pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$.

Sebaliknya, jika A pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$, maka $AB = O$, untuk suatu matriks tak nol $B \in M_{n\times n}(R)$. Misal B dipartisi ke dalam kolom-kolom menjadi $(c_1 | c_2 | ... | c_n)$. Lebih lanjut, $O = AB = (Ac_1 | Ac_2 | ... | Ac_n)$ berakibat $Ac_i = 0$, untuk setiap i, $i = 1, 2, ..., n$. Di lain pihak, karena $B \ne O$, maka pasti ada c_i, $1 \le i \le n$ yang bukan vektor nol di R^n. Dengan kata lain sistem persamaan $Ax = 0$ memiliki solusi non-trivial. Hal ini berakibat $\mathrm{rk}(A) < n$, yang berarti $\det(A) \in Z(R)$. Jika A merupakan pembagi nol kanan, maka A^t merupakan pembagi nol kiri. Akibatnya $\det(A) = \det(A^t) \in Z(R)$. ■

Teorema 11 mengakibatkan bahwa himpunan semua pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$ sama dengan himpunan semua pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$, yaitu $Z(M_{n\times n}(R))$.

Akibat 12. *Diberikan R adalah suatu daerah integral dan* $A \in M_{n\times n}(R)$. *Maka* $A \in Z(M_{n\times n}(R))$ *jika dan hanya jika* $\det(A) = 0$.

Lemma 13. *Diberikan* $C, D \in M_{n\times n}(R)$, *dan* $x \in R$. *Jika* $xC = xD$, *maka* $x\det(C) = x\det(D)$.

Teorema 14. $A \in Z(M_{n\times n}(R))$ *jika dan hanya jika* $A \in Z(R[A])$.

Bukti. Karena $R[A] \subseteq M_{n\times n}(R)$, implikasi dari kanan ke kiri jelas. Teorema di atas juga jelas untuk $n=1$. Oleh karena itu, diasumsikan $n \geq 2$ dan $A \in Z(M_{n\times n}(R))$. Pertama dibuktikan untuk kasus $n=2$. Misalkan $C_A = x^2 + a_1 x + a_2$, maka $a_2 = \det(A) \in Z(R)$. Oleh karena itu terdapat $b \in R^*$ sedemikian hingga $ba_2 = 0$. Menurut Teorema Cayley-Hamilton,
$O = bC_A(A) = bA^2 + ba_1 A = A(bA + ba_1 I_2)$
Jika $bA + ba_1 I_2 \neq O$, maka $A \in Z(R[A])$. Misalkan $bA + ba_1 I_2 = 0$, maka $bA = b(-a_1 I_2)$. Menurut Lemma 13, $b\det(A) = b\det(-a_1 I_2) = ba_1^2$. Akan tetapi $b\det(A) = 0$, sehingga $ba_1^2 = 0$. Misalkan $i = \min\{j \mid ba_i^{\,j} = 0\}$, maka $i=1$ atau $i=2$. Misal $b' = ba_1^{i-1}$, maka $b' = b$ jika $i=1$ dan $b' = ba_1$ jika $i=2$. Dalam kedua kasus tersebut $b' \neq 0$ dan

$$
\begin{aligned}
O &= a_1^{i-1}(bA^2 + ba_1 A)\\
&= b'A^2 + ba_1^{\,i} A\\
&= b'A^2\\
&= (b'A)A
\end{aligned}
$$

Jika $b'A = O$, maka $A \in Z(R[A])$. Jika $b'A \neq O$, maka $(b'A)A = O$ berakibat $A \in Z(R[A])$. Oleh karena itu, pada kedua kasus A pembagi nol di $R[A]$.

Kemudian dibuktikan untuk kasus $n \geq 3$. Langkah pembuktian sama seperti pada pernyataan sebelumnya. Misalkan $C_A = x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, maka menurut Teorema 11, $\det(A) = \pm a_n \in Z(R)$. Oleh karena itu ada $b \in R^*$ sedemikian hingga $ba_n = 0$. Menurut Teorema Cayley-Hamilton, $O = bC_A(A) = bA(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$.
Jika $b(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) \neq O$, maka $A \in Z(R[A])$. Misalkan $b(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) = O$, maka kita punya persamaan berikut:

$$bA(A^{n-2} + \ldots + a_{n-2}) = -ba_{n-1}I_n. \quad (13)$$

Menurut Lemma 13 persamaan di atas berakibat:
$b\det(A)\det(A^{n-2} + \ldots + a_{n-2}) = b(-1)^n a_{n-1}^{\;n}$.
Karena $b\det(A) = 0$, maka $ba_{n-1}^{\;n} = 0$. Misalkan $i = \min\{j \mid ba_{n-1}^{\;j} = 0\}$, maka $1 \leq i \leq n$. Misalkan $b' = ba_{n-1}^{\;i-1}$, maka $b' \neq 0$ dan $b'a_n = b'a_{n-1} = 0$. Dengan mengalikan persamaan (13) dengan $a_{n-1}^{\;i-1}$, diperoleh:
$A(b'(A^{n-2} + a_1 A^{n-3} + \ldots + a_{n-2})) = O$.
Jika $b'(A^{n-2} + a_1 A^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) \neq O$, maka berakibat $A \in Z(R[A])$. Jika $b'(A^{n-2} + a_1 A^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) = O$, maka diperoleh:
$b'A(A^{n-3} + a_1 A^{n-4} + \ldots + a_{n-3}) = -b'a_{n-2}I_n$.
Menggunakan argumen yang sama, dapat diturunkan persamaan yang identik dengan satu derajat lebih rendah. Melalui perulangan berhingga kali, kita

dapatkan $Af(A)=O$, untuk suatu $f(A)\in R[A]^*$ atau $cA=O$, untuk suatu $c\in R^*$. Dalam kedua kasus tersebut, $A\in Z(R[A])$. ■

Sebelum membahas lebih jauh mengenai penerapan resultan pada pembagi nol matriks atas ring, berikut ini diberikan konsep dari ideal null.

Lemma 15. *Diberikan* $A\in M_{n\times n}(R)$. *Pemetaan* $\nu_A : R[x]\to M_{n\times n}(R)$ *dengan* $\nu_A(f):=f(A)$ *merupakan R-homomorfisma modul.*

Selanjutnya, kernel dari ν_A disebut dengan *ideal null* dari *A*, dan dinotasikan dengan N_A. Berikut ini diberikan sebuah teorema mengenai pembagi nol dan kaitannya dengan ideal null dan polinomial karakteristik. Dalam teorema ini, konsep resultan berperan dalam proses pembuktiannya.

Teorema 16. *Diberikan* $A\in M_{n\times n}(R)$ *dan* $g\in R[x]$. *Maka* $g\in Z(R[x]/N_A)$ *jika dan hanya jika* $g\in Z(R[x]/C_A)$.

Bukti.
$N_A=\mathrm{Ker}(\nu_A)=\{f\in R[x] \mid f(A)=0\}$, maka berdasarkan teorema fundamental homomorfisma, maka $R[x]/N_A\cong R[A]$ merupakan R-isomorfisma modul. Oleh karena itu, $g\in Z(R[x]/N_A)$ jika dan hanya jika $g(A)\in Z(R[A])$. Berdasarkan Lemma 14, maka $g(A)\in Z(R[A])$ jika dan hanya jika $g(A)\in Z(M_{n\times n}(R))$ jika dan hanya jika $\det(g(A))\in Z[R]$. Berdasarkan Lemma Spesialisasi dan Teorema 10, diperoleh $\mathrm{Res}_x(C_A,g)=\det(g(A))\in Z(R)$ jika dan hanya jika $g\in Z(R[x]/N_A)$. Berdasarkan Teorema 10 diperoleh bahwa $\mathrm{Res}_x(C_A,g)\in Z(R)$ jika dan hanya jika $g\in Z(R[x]/C_A)$. Jadi, terbukti bahwa $g\in Z(R[x]/N_A)$ jika dan hanya jika $g\in Z(R[x]/C_A)$. ■

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa resultan dapat digunakan untuk mengecek apakah dua polinomial atas suatu ring itu mempunyai suatu faktor iredusibel yang sama atau tidak, yaitu melalui sifat pembagi nol pada ring tersebut. Lebih lanjut, resultan dapat diterapkan dalam pembuktian sifat-sifat pembagi nol matriks atas ring.

DAFTAR PUSTAKA

Brown, W.C., 1992, *Matrices over Commutative Rings*, Marcel Dekker Inc, New York.

Cox, D., Little, J., and Shea, D.O., 1996, *Ideal, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, *Second Edition*, Springer-Verlag, New York.

Rosnawati R., 1999, *Resultan Dua Polinomial dan Penggunaannya*, Tesis, Program Pasca Sarjana UGM, Yogyakarta.